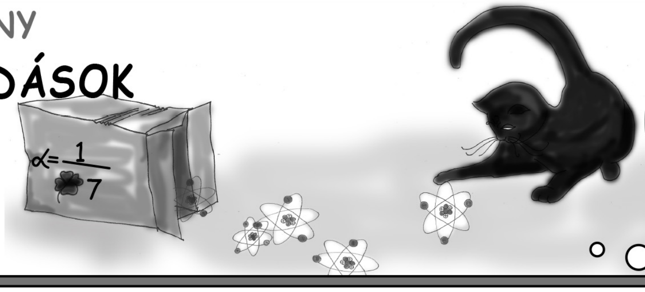
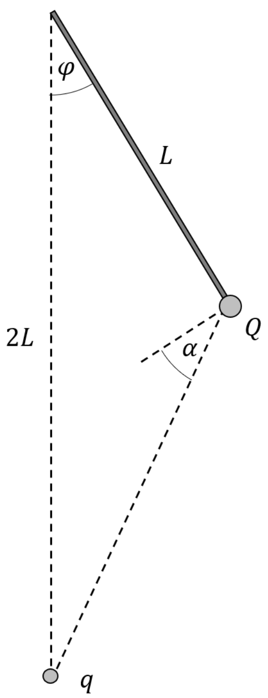
. DÜRER VERSENY
FIZIKA MEGOLDÁSOK
11-12. OSZTÁLYOSOK
DÖNTŐ:
2020. FEBRUÁR 7-9.



F
kategória

1. Feladat

(a)



Írjuk fel a koszinusz- és a szinusz-tételt a felfüggesztési pont, a Q töltés és a q töltés alkotta háromszögre (ld. *ábra*):

$$r^2 = 5L^2 - 4L^2 \cos\varphi \, , \tag{1}$$

$$\frac{r}{\sin\varphi} = \frac{2L}{\sin(90^\circ + \alpha)} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{r}{\sin\varphi} = \frac{2L}{\cos\alpha} \, . \tag{2}$$

Ezt követően vizsgáljuk meg a Q töltésre vonatkozó mozgásegyenlet rúdra merőleges komponensét. A nehézségi erő és a q töltés okozta Coulomb-taszítást kell figyelembe venni. Egyensúlyban az eredő rúdra merőleges komponense nulla:

$$0 = mg\sin\varphi - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\cos\alpha \, .$$

A (1) és (2) egyenleteket felhasználva:

$$0 = mg\sin\varphi - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2QqL\sin\varphi}{r^3} \, ,$$

$$0 = \sin\varphi\left[mg - \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{QqL}{(5L^2 - 4L^2\cos\varphi)^{3/2}}\right] \, .$$

A fenti egyenlet két lehetséges megoldása $\varphi = 0$ és $\varphi = 180^\circ$ (hiszen ekkor $\sin\varphi$ is 0). Ezen kívül más megoldás is lehet, ha a szögletes zárójelben álló kifejezés nulla:

$$0 = mg - \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{L^2(5 - 4\cos\varphi)^{3/2}} \, ,$$

$$5 - 4\cos\varphi = \left(\frac{Qq}{2\pi\varepsilon_0 mgL^2}\right)^{2/3} \, ,$$

$$\varphi = \arccos\left[\frac{5}{4} - \left(\frac{Qq}{16\pi\varepsilon_0 mgL^2}\right)^{2/3}\right] \, .$$

Természetesen ez csak akkor értelmes, ha az arkusz koszinusz argumentuma -1 és 1 közötti:

$$\frac{1}{4} \le \left(\frac{Qq}{16\pi\varepsilon_0 mgL^2}\right)^{2/3} \le \frac{9}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{2\pi\varepsilon_0 mgL^2}{Q} \le q \le \frac{54\pi\varepsilon_0 mgL^2}{Q} \tag{3}$$

Összefoglalva, a lehetséges egyensúlyi helyzetek száma kettő, ha a (3) feltétel nem teljesül, három, ha teljesül.

(b)

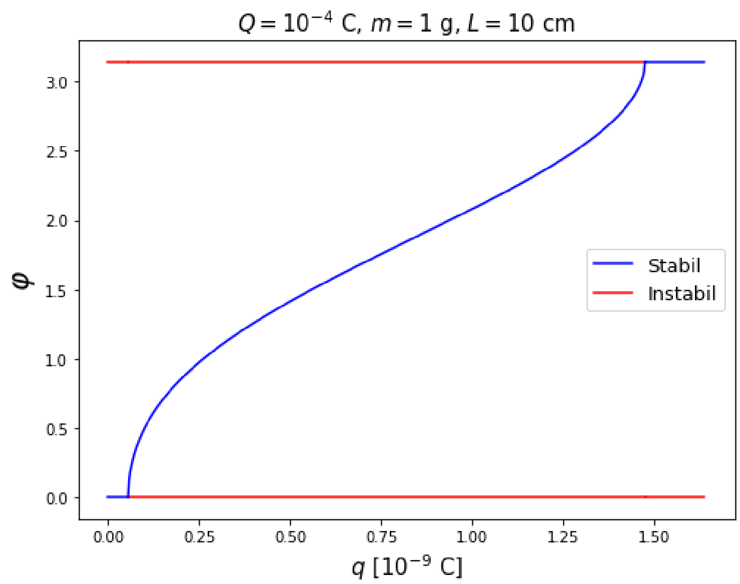
A stabilitás vizsgálatához mozdítsuk ki a testet kicsiny ε szöggel φ egyensúlyi helyzetéből. Ekkor a mozgásegyenlet tangenciális irányban a korábbiak alapján (a φ-t növelő irányt pozitívnak választva):

$$ma_t = \sin(\varphi+\varepsilon)\left[\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{L^2\left(5-4\cos(\varphi+\varepsilon)\right)^{3/2}} - mg\right] .$$

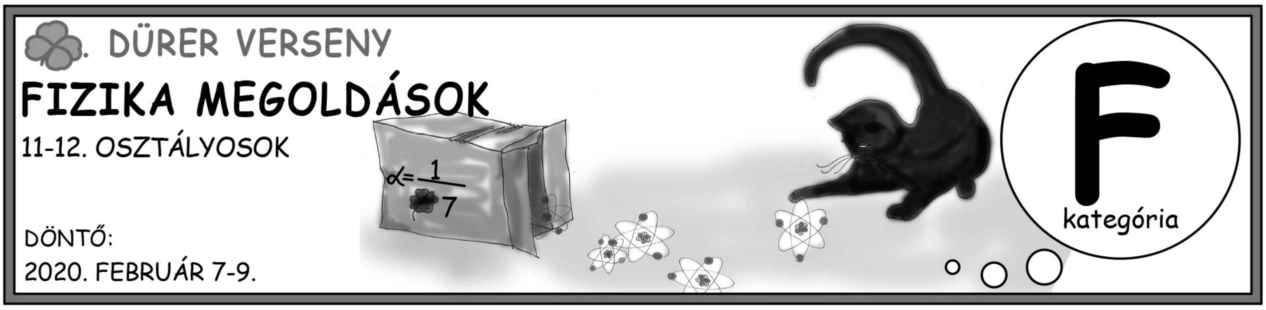
Tudjuk, hogy $0 \leq \varphi+\varepsilon \leq 180°$ esetén $\sin(\varphi+\varepsilon) > 0$, így ez akkor stabil, ha a szögletes zárójelben álló kifejezés ε-nal ellentétes előjelű.

- A $\varphi = 0$ esetben $\varepsilon > 0$, így negatív előjelet várunk. Ha $\varepsilon = 0$-nál a kifejezés negatív, akkor kis ε-okra biztosan nem fog előjelet váltani, tehát ez az egyensúlyi helyzet stabil lesz. Ennek feltétele: $q < \frac{2\pi\varepsilon_0 mgL^2}{Q}$.
- Hasonló a helyzet a $\varphi = 180°$ esetben. A stabilitás feltétele ekkor: $q > \frac{54\pi\varepsilon_0 mgL^2}{Q}$.
- A harmadik egyensúlyi helyzetben $\varepsilon = 0$ esetén éppen nulla a kifejezés. Ha ε-t növeljük, a koszinusz csökkenni fog, ezáltal a teljes kifejezés is csökken. Ha ε-t csökkentjük, hasonlóan a teljes kifejezés nő. Tehát ez az egyensúlyi helyzet mindig stabil (amennyiben megvalósulhat).

Megjegyzés: Érdekességként ábrázolhatjuk az egyensúlyi helyzeteket és stabilitásukat q függvényében speciális Q, m és L megválasztása mellett:



Megfigyelhetőek bizonyos elágazások, ahol egy stabil egyensúlyi helyzet egy stabillá és egy instabillá válik szét, avagy fordítva. Az ehhez hasonló jelenségeket szokás bifurkációnak nevezni, és a fizika több területén is előfordulnak.



2. Feladat

(a) és (b)

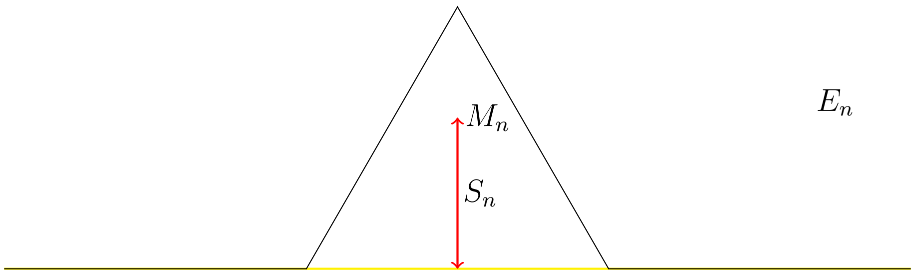
Tekintsünk N darab tömegpontot! Az i-ik tömegét jelölje m_i, helyvektorát $\boldsymbol{r}_i$.
Ennek az N pontból álló rendszernek a tömegközéppontja

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i$$

helyen található, ahol M a rendszer össztömege, azaz

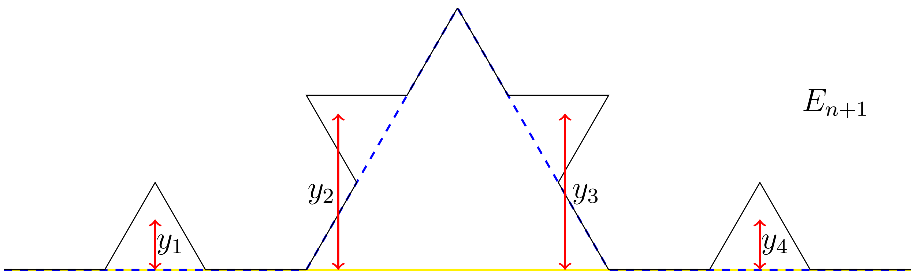
$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i.$$

A Koch-görbe szimmetrikus, ezért vektorok helyett elegendő y tengely irányú távolságokkal dolgozni. Jelölje az n-ik Koch-görbe tömegét M_n és tömegközéppontjának E_0 tengelytől vett távolságát S_n.



Következő, n+1-es Koch-görbének tömege $M_{n+1} = \frac{4M_n}{3}$ ugyanis a harmadára kicsinyített görbét vesszük négyszer. $\boldsymbol{S}$ kifejezésében levő szumma $N = 4$-ig fut, és a benne levő $m_i = \frac{M_n}{3}$ tömegek azonosak, így kiemelhető a szummából.

$$S_{n+1} = \frac{1}{M_{n+1}}\sum_{i=1}^{4} m_i y_i = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} y_i$$



Itt y_i a kicsinyített Koch-görbék tömegközéppontjainak magassága, $y_1 = y_4 = \frac{S_n}{3}$ és $y_2 = y_3 = \frac{L}{6}\cos 60° + \frac{S_n}{3}\sin 30°$. Ezek alapján a rekurziós összefüggés

$$S_0 = 0, \quad S_{n+1} = \frac{S_n}{4} + \frac{L\sqrt{3}}{24}.$$

Ennek segítségével kiszámolható, hogy $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{24}L$ és $S_2 = 5\frac{\sqrt{3}}{96}L$. (Ez a válasz az a) feladatra).

(c)

Önmagában a rekurzív képlet alapján nem nyilvánvaló, hogy S_n sorozatnak létezik határértéke, ám a geometriai kép alapján ez evidens. S_n sorozatnak biztosan létezik felső korlátja, ilyen például a Koch-görbe magassága. A rekurzív képletből az is látszik, hogy S_n szigorúan monoton növő sorozat. Szigorúan monoton növekvő, felülről korlátos sorozatoknak biztosan létezik határértéke, azaz a Koch-görbe tömegközéppontjának magassága egy

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

értékhez tart. A határérték létezéséből következik az, hogy a sorozat indexében végtelenhez tartva a tagok különbsége nullához tart, azaz

$$\lim_{n\to\infty} S_{n+1} - S_n = 0.$$

Az előbbi gondolatnak a kapcsolata a rekurziós összefüggéssel az, hogy $S_{n+1} = S_n = S$-t írva a rekurziós képletbe megkapjuk a kérdéses

$$S = \frac{S}{4} + \frac{L\sqrt{3}}{24} \quad \to \quad S = \frac{L\sqrt{3}}{18}$$

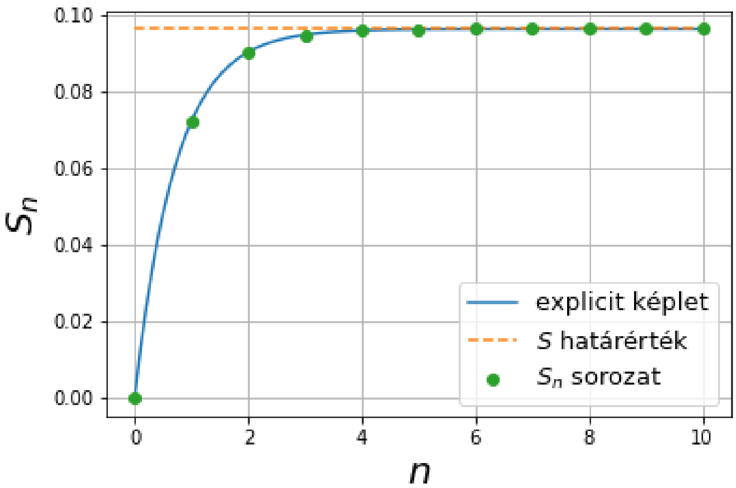
határértéket.

Megjegyzés: Másképpen is eljuthatunk ehhez az eredményhez. A rekurziós képletben szereplő konstanst nevezzük el $Q = \frac{L\sqrt{3}}{24}$-nak. A rekurziós képletből gyártható egy emeletes tört, ami azonos egy mértani sorral.:

$$\frac{\frac{\frac{\frac{0}{4}+Q}{4}+Q}{4}+Q}{4} + Q \cdots = Q\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \dots\right) = \frac{Q}{1-\frac{1}{4}} = \frac{L\sqrt{3}}{18}$$

S_n explicit képlete is megadható.:

$$S_n = Q\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}}\right) = Q\frac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}}$$



3. Feladat

Az ideális gázok állapotegyenletét felírva megkaphatjuk az izobár egyenletét a $T - V$ síkon:

$$pV = nRT \ ,$$

$$T = \frac{p}{nR}V \ . \tag{4}$$

Ezek origón átmenő egyenesek, amelyek meredeksége a nyomással egyenesen arányos. Ott lesz tehát a nyomás minimális illetve maximális, ahol a legkisebb illetve legnagyobb meredekségű izobárok érintik az ellipszist. Feladatunk így a két érintő megtalálása.

Az ellipszis egyenlete a megadott ábra alapján:

$$\frac{(V-V_0)^2}{\frac{1}{16}V_0^2} + \frac{(T-T_0)^2}{\frac{1}{25}T_0^2} = 1 \ . \tag{5}$$

A (4) és (5) kifejezések alapján a metszéspontnak ki kell elégítenie az alábbi egyenletet:

$$\frac{(V-V_0)^2}{\frac{1}{16}V_0^2} + \frac{(\frac{p}{nR}V-T_0)^2}{\frac{1}{25}T_0^2} = 1 \ ,$$

$$\frac{16}{V_0^2}V^2 - \frac{32}{V_0}V + 16 + \frac{25p^2}{n^2R^2T_0^2}V^2 - \frac{50p}{nRT_0}V + 25 = 1 \ ,$$

$$\left(\frac{16}{V_0^2} + \frac{25p^2}{n^2R^2T_0^2}\right)V^2 - \left(\frac{32}{V_0} + \frac{50p}{nRT_0}\right)V + 40 = 0 \ .$$

Érintőt olyan p esetén kapunk, amikor ennek az egyenletnek pontosan egy megoldása van. Ez akkor fordulhat elő, ha a diszkrimináns nulla:

$$\left(\frac{32}{V_0} + \frac{50p}{nRT_0}\right)^2 - 160\left(\frac{16}{V_0^2} + \frac{25p^2}{n^2R^2T_0^2}\right) = 0 \ ,$$

$$\frac{1500}{n^2R^2T_0^2}p^2 - \frac{3200}{V_0 nRT_0}p + \frac{1536}{V_0^2} = 0\ .$$

Ez másodfokú egyenlet p-re nézve, megoldásai:

$$p_{min} = 0,73 \cdot \frac{nRT_0}{V_0}\ , \qquad p_{max} = 1,40 \cdot \frac{nRT_0}{V_0}\ . \tag{6}$$

4. Feladat

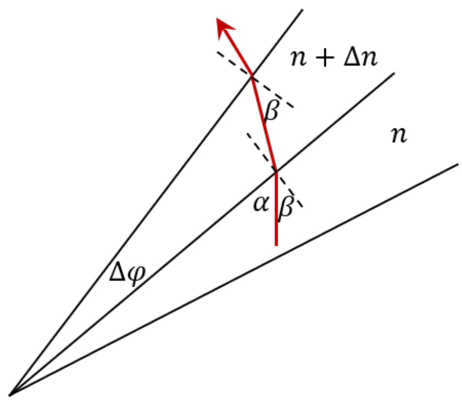
(a)

Bontsuk fel a vizsgált térrészt kicsiny $\Delta\varphi$ középponti szögű tartományokra, amelyeken belül a törésmutató közel állandónak tekithető (1. ábra). A tartományok határain a fénysugár a Snellius-Descartes-törvénynek megfelelően törik:

$$n \sin\beta = (n + \Delta n)\sin(\beta + \Delta\beta)\ .$$

A fénysugár rádiusszal bezárt α szöge éppen $90° - \beta$, így:

$$n \cos\alpha = (n + \Delta n)\cos(\alpha + \Delta\alpha)\ .$$



1. ábra

Ezt az addíciós tétel szerint felbontva, a segítségben megadott első két közelítést felhasználva, és a másodrendűen kicsi tagokat elhanyagolva:

$$n\cos\alpha \approx (n + \Delta n)\left(\cos\alpha\cos\Delta\alpha - \sin\alpha\sin\Delta\alpha\right)\ ,$$

$$n\cos\alpha \approx n\cos\alpha + \Delta n\cos\alpha - n\sin\alpha\Delta\alpha\ ,$$

$$n\sin\alpha\Delta\alpha \approx \Delta n\cos\alpha\ . \tag{7}$$

A $\Delta\varphi$ szögű tartományon belül a fénysugár egyenes pályán halad. Akkor lesz logaritmikus spirál alakú a pálya, ha a következő tartomány határánál ismét β lesz a beesési szög, vagyis összességében α nem változott. Ekkor az 1. ábrán látható módon teljesül a következő:

$$\Delta\varphi = \Delta\alpha\ . \tag{8}$$

Ezt az (7) egyenlettel összevetve:

$$\frac{\Delta n}{n} \approx \mathrm{tg}\alpha \cdot \Delta\varphi\ .$$

A segítségben szereplő harmadik közelítést felhasználva:

$$\Delta\left(\ln n\right) = \Delta\left(\mathrm{tg}\alpha \cdot \varphi\right)$$

A feladat feltételei szerint $\varphi = 0$ esetén a törésmutató n_0 értékű. Ebből végül megkapjuk a törésmutató helyfüggését:

$$\ln n - \ln n_0 = \mathrm{tg}\alpha \cdot \varphi$$

$$n(\varphi) = n_0 \cdot e^{\mathrm{tg}\alpha\cdot\varphi} \tag{9}$$

(b)

Az $\alpha = 0$ esetben $\mathrm{tg}\alpha = 0$, így a (9) formula alapján a törésmutató:

$$n_{\text{egyenes}}(\varphi) = n_0 \tag{10}$$

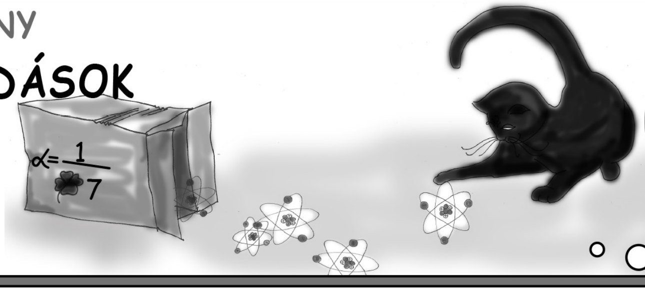
ez tehát megvalósulhat. Az eredmény triviális, azt kaptuk, hogy konstans törésmutató esetén egyenes pályán halad a fénysugár.

Az $\alpha = 90°$ esetben $\mathrm{tg}\alpha$ nem értelmes (végtelenhez tart), így a törésmutató sem értelmezhető (szintén végtelenhez tart). Ebből arra következtethetünk, hogy csak φ-től függő törésmutató esetén a henger tengelyével egybeeső középpontú körpálya nem alakulhat ki. Ez más módszerekkel is belátható. ŕ

5. Feladat

Ahhoz, hogy a kerékpáros az úton végigmozogjon a szakaszon egy irányban, egy minden pontban állandó nagyságú erőt kell legyőzzön. A munkatétel szerinti $W = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{x}$ összefüggésből – amely megadja az elvégzett munkát a fékezőerő (mint vektor) és elmozdulás (mint vektor) skalárszorzataként – azt láthatjuk tehát, hogy a teljes munka az erő és a szakasz által definiált vektor skalárszorzataként áll elő, mivel az erő nem függ a helytől. Jelölje az otthon pontját O, az iskoláét S! A teljes munka számolható az iskolába menet végzett munka és a hazamenet végzett munka összegeként,

$$W = W_{\overrightarrow{OS}} + W_{\overrightarrow{SO}} = \mathbf{F}_{\overrightarrow{OS}} \cdot \overrightarrow{OS} + \mathbf{F}_{\overrightarrow{SO}} \cdot \overrightarrow{SO}.$$



(a)

1. $\mathbf{F} = -\alpha \mathbf{v}$. A negatív előjel azt jelenti, hogy az erő fékezi a mozgást, a kerékpárosnak kell munkát végeznie, hogy ne csökkenjen az energiája, mert a környezete elvesz tőle energiát. Előjelhelyesen tehát a kerékpáros által végzett munka

$$W = \alpha v L + \alpha v L = 2\alpha v L.$$

2. $\mathbf{F} = -\beta v^2 \cdot \tilde{\mathbf{v}}$, ahol $\tilde{\mathbf{v}}$ a sebesség irányú egységvektor. A kerékpáros által végzett munka

$$W = \beta v^2 L + \beta v^2 L = 2\beta v^2 L.$$

3. $W = F_g \cdot L + F_g \cdot L = 2F_g L$

4. Ha a kerékpáros sebessége v, akkor $t = L/v$ idő alatt megy végig egy irányban. A dinamó által leadott hasznos teljesítmény P_d, amelyet a mozgásból nyeri $\eta = P_d/P_{teljes}$ hatásfokkal. A kerékpárosnak a dinamó miatt $P_{teljes} = P_d/\eta$ teljesítménnyel kell haladnia t időn át, egy irányban. A teljes elvégzett munka

$$W = t \cdot P_d/\eta + t \cdot P_d/\eta = 2tP_d/\eta = 2LP_d/(v\eta)\,.$$

(b)

- Az közegellenállási erőkből származó munka a sebességnek szigorú monoton növő függvénye, ezért minél kisebb sebességgel érdemes haladni az első két fékezőhatást tekintve. Érdekes matematikai tény, hogy nincs legkisebb szám a $(0; 1]$ intervallumon, tehát nincs olyan $x \in (0; \infty)$, amelyre az $f(x) = x$ vagy $f(x) = x^2$ minimális volna. Amint mondhatunk, hogy minél kisebb, annál jobb.

- A gördülési ellenállás legyőzéséhez elvégzett munka független a sebességtől, azért ott mindegy, mekkora sebességet választ főhősünk.

- A dinamó esetén viszont a végzett munka a (pozitív) sebességnek szigorú monoton csökkenő függvénye, ezért minél gyorsabban érdemes mennie. Ismét csak azt mondhatjuk, hogy nincs legnagyobb szám a $(0; \infty)$ intervallumon, vagy más szóval, nincs olyan $x \in (0; \infty)$, amelyre $1/x$ minimális volna. Amint mondhatunk, hogy x minél nagyobb, annál jobb.

(c)

Ebben az esetben a szél, és így a relatív sebesség és a közegellenállási erő is párhuzamos a kerékpáros sebességével. Fújjon a szél az iskola felől hazafelé, és erre az esetre írjuk fel a munkákat! (Ha a másik irányba fújna, csupán a két külső tag sorrendjét kellene felcserélni.)

- Lamináris áramlás esetén $W = \alpha (v + v_{sz}) L + \alpha (v - v_{sz}) L = 2\alpha v L$, vagyis nem kerül több munkába.

- Turbulens áramlás esetén

$$W = \beta(v + v_{sz})^2 L + \beta(v - v_{sz})^2 L = 2\beta\left(v^2 + v_{sz}^2\right)L$$
$$\Delta W = 2\beta v_{sz}^2 L,$$

  tehát itt már több munkát kell végeznie a bicajosnak.

(d)

- Lamináris áramlás esetén az erő, mint vektor, a relatív sebesség α szorosa. Ez a tény, hogy a kettő között egy lineáris kapcsolat van, fontos. Ha a relatív sebességet felbontjuk két vektor összegére, akkor az egyes komponensekre számolt erők vektori összege az eredő vektorra számolt erővel lesz egyező:

$$\mathbf{F} = -\alpha\mathbf{v} = -\alpha\left(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\right) = \left(-\alpha\mathbf{v}_1\right) + \left(-\alpha\mathbf{v}_2\right) = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2.$$

  Ha a felbontás iránya épp az otthon-iskola-tengely és az arra merőleges irány, az most nagyon praktikus lesz nekünk. A relatív sebességet éppúgy bonthatjuk fel komponenseire, mint a közegellenállási erőt, és a két háromszög (vagy téglalap) egymáshoz hasonló lesz. Aztláthatjuk tehát, hogy a haladás irányával párhuzamos komponense az erőnek éppen úgy számolható, mintha csak a haladási iránnyal párhuzamos komponense számítana a relatív sebességnek.

  Az erőnek az a komponense, ami merőleges a haladásra, nem végez munkát. Munkát csak a sebességgel párhuzamos komponens végez,

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\overrightarrow{OS}} \cdot \overrightarrow{OS} = \left(\mathbf{F}_\parallel + \mathbf{F}_\perp\right) \cdot \overrightarrow{OS} &= \mathbf{F}_\parallel \cdot \overrightarrow{OS} + \underbrace{\mathbf{F}_\perp \cdot \overrightarrow{OS}}_{0} \\ &= \left[v + v_{sz} \cdot \cos(\varphi)\right] L.\end{aligned}$$

  A másik irányra hasonló eredményt kapunk: $\mathbf{F}_{\overrightarrow{SO}} \cdot \overrightarrow{SO} = \left[v - v_{sz} \cdot \cos(\varphi)\right] L$. A munkát megkapjuk ezek L szereseként, és a két tag összegéből ismét kiesik a szél sebessége.

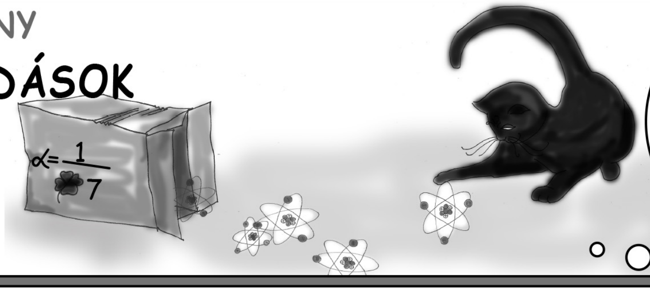
- Turbulens áramlásnál bonyolult a helyzet, mert az erő a sebességnek nem lineáris függvénye. Itt már nem mondhatjuk, amit az előbb, vagyis most

$$\mathbf{F}_\parallel + \mathbf{F}_\perp = \mathbf{F} = -\beta v^2 \tilde{\mathbf{v}} \neq \left(-\beta {v_\perp}^2 \tilde{\mathbf{v}}_\perp\right) + \left(-\beta {v_\parallel}^2 \tilde{\mathbf{v}}_\parallel\right),$$

  ahol $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\parallel$, $|\mathbf{v}_\perp| = v_\perp$ és $\left|\mathbf{v}_\parallel\right| = v_\parallel$, továbbá a hullámos vektorok a jelzett vektor irányú egységvektorok. Amit továbbra is mondhatunk, hogy a végzett munka az erőnek csak az $\overrightarrow{OS}$ vektorral párhuzamos komponensétől függ, de ezt nem a sebesség-komponensből kell számoljuk, hanem az erőnek a vetületéből.

  A relatív sebességet a sebességek $\overrightarrow{OS}$-sel párhuzamos és párhuzamos komponenseinek nagyságából számolhatjuk a Pitagorasz-tétel segítségével,

$$\begin{aligned}v_{rel} = \sqrt{v_\parallel^2 + v_\perp^2} &= \sqrt{\left[v_{sz} \cdot \cos(\varphi) + v\right]^2 + \left[v_{sz} \cdot \sin(\varphi)\right]^2} \\ &= \sqrt{v_{sz}^2 + v^2 + 2vv_{sz}\cos(\varphi)}.\end{aligned}$$



Az $\overrightarrow{OS}$-sel bezárt γ szögre pedig

$$\cos(\gamma) = (v_{sz}\cos(\varphi) + v)/v_{rel}.$$

A teljes közegellenállási erő $\mathbf{F} = -\beta v_{rel}^2 \tilde{\mathbf{v}}_{rel}$, ennek $\overrightarrow{OS}$ irányú komponense:

$$\left|\mathbf{F}_{\parallel}\right| = F_{\parallel} = F \cdot \cos(\gamma) = \beta\sqrt{v_{sz}^2 + v^2 + 2vv_{sz}\cos(\varphi)}\,(v_{sz}\cos(\varphi) + v)\,,$$

amelyből egy L-lel való szorzással megkapjuk az egy irányba szükséges elvégzett munkát. A másik irányba szükséges munkát pedig egy $v_{sz} \mapsto -v_{sz}$ cserével számolhatjuk, így a teljes munka:

$$W = L\beta\,[\sqrt{v^2 + v_{sz}^2 + 2vv_{sz}\cos(\varphi)} \cdot (v + v_{sz}\cos(\varphi)) + \\ + \sqrt{v^2 + v_{sz}^2 - 2vv_{sz}\cos(\varphi)} \cdot (v - v_{sz}\cos(\varphi)).$$

Ellenőrizhetjük, hogy $\varphi = 0$ esetén éppen visszakapjuk azt az esetet, amit már kiszámoltunk, vagyis hogy a szél $\overrightarrow{OS}$ irányú. Egy másik konkrét szám, ami érdekes lehet, az a $\varphi = 90°$. Erre azt kapjuk, hogy

$$W = 2L\beta\sqrt{v^2 + v_{sz}^2} \cdot v.$$

Ez nagyobb, mint ami ahhoz szükséges, mint amikor nem fúj a szél. Tehát turbulens áramlás esetén akkor is nagyobb erő kell a kerékpározáshoz, hogyha a szél a menetirányra merőlegesen fúj.

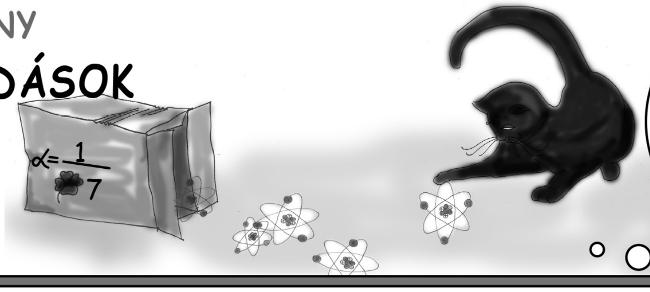
(e)

$$W = 2\alpha vL + 2F_g L + 2LP_d/(\eta v)$$

Mikor minimális v-ben W? A minimum helyét a 2. tag, azaz gördülési ellenállásból származó tag nem befolyásolja, mert értéke független a sebességtől, így ki lehet hagyni. Az optimális sebességnél tehát

$$W = (2\alpha L) \cdot v + (2LP_d/\eta) \cdot \frac{1}{v}$$

minimális. Az első tag azt mondja, hogy minél nagyobb a sebesség, annál nagyobb W, a második tag éppen fordítva. Az első tag v-nek a növekedtével mindig ugyanannyira növeli W értékét, a második viszont egyre kevésbé csökken, alulról a 0 a korlátja. Ha nagyon kicsi a sebesség, akkor a 2. tag nagy. Ahogy növeljük a sebességet, a 2. tag eleinte nagyon csökken. Nagyon nagy sebességnél pedig az 1. tag folyamatosan, állandó mértékben nő a sebességgel, míg a 2. már lényegében nem változik. A kettő szélsőség között találhatunk tehát egy olyan sebességet, amikor az 1. tag éppúgy növekszik, ahogy a 2. csökken. Ennél kisebb sebességnél pedig az 2. tag még gyorsabban csökkenne, mint ahogy az 1. tag növekedne. Nagyobb sebességnél viszont a 2. tag már lassabban csökken, mint ahogy nő az 1, így itt is nagyobb volna W értéke. Hol van az a határ, ahol a csökkenés és a növekedés mértéke ugyanakkora?



- Ha grafikusan nézzük, azt látjuk, hogy van egy $2\alpha L$ meredekségű egyenes és egy $2LP_d/\eta$ szeresére, y-ban kinyújtott hiperbola. Mikor lesz ellentétes nagyságú a két függvény meredeksége? Ezt elemi eszközökkel nehéz megmondani. Ügyesen szórjuk szét az együtthatókat!

$$\underset{\sim}{W} = \frac{W}{\sqrt{2\alpha L \frac{\eta}{2LP_d}}} = \sqrt{2\alpha L \frac{\eta}{2LP_d}} \cdot v + \frac{1}{\sqrt{2\alpha L \frac{\eta}{2LP_d}} \cdot v}$$

Az így bevezett $\underset{\sim}{W}$ mennyiség azért jó, mert W-nek csak egy számszorosa, tehát a két fajta W-nek ugyanott van minimuma. A sebességek együthatói pedig jók, mert ha most bevezetjük a

$$\widehat{v} = \sqrt{2\alpha L \frac{\eta}{2LP_d}} \cdot v$$

jelölést, akkor kapjuk, hogy $\underset{\sim}{W} = \widehat{v} + \frac{1}{\widehat{v}}$. Itt újra felthetjük tehát a kérdést, hogy mikor lesz az 1. és a 2. tag meredeksége ellentétes nagyságú. Az 1. tag meredeksége 1, tehát a kérdés, hogy a másodiké hol -1? Szimmetria okok miatt ez a

$$\widehat{v} = 1$$

helyen lehetséges, tehát ha

$$\widehat{v} = \sqrt{2\alpha L \frac{\eta}{2LP_d}} \cdot v = 1 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{LP_d}{\alpha L \eta}}.$$

- Az előző gondolatmenet lényegében a deriválásra alapul, és intuitív módon oldja meg a kérdést. Lehetne egyből deriválással is vizsgálni a szélsőhelyzeteket és inflexiós pontokat, azonban van egy elemi módszer a számtani-mértani közepek alkalmazásával. Vezessük be ugyanúgy a $\widehat{v}$ mennyiséget, hogy csak a $\underset{\sim}{W} = \widehat{v} + \frac{1}{\widehat{v}}$ függvényt kelljen minimalizálni. Két szám számtani és mértani középéről azt tudjuk, hogy előbbi mindig nagyobb, vagy egyenlő, mint az utóbbi, és egyenlő csak akkor lehet a két mennyiség, ha a két szám is egyenlő. Legyen az egyik szám $\widehat{v}$, a másik pedig $\frac{1}{\widehat{v}}$, ekkor a számtani-mértani közepek alapján

$$\frac{\widehat{v} + \frac{1}{\widehat{v}}}{2} \geqslant \sqrt{\widehat{v} \frac{1}{\widehat{v}}} = 1 \Rightarrow W = \widehat{v} + \frac{1}{\widehat{v}} \geqslant 2,$$

egyenlőség pedig akkor van, ha

$$\widehat{v} = \frac{1}{\widehat{v}} \Rightarrow \left|\widehat{v}\right| = 1 \Rightarrow |v| = \sqrt{\frac{LP_d}{\alpha L \eta}}.$$